MATRIK dan RUANG VEKTOR

A. Matrik

1. Pendahuluan

Sebuah matrik di**definisi**kan sebagai susunan persegi panjang dari bilangan bilangan yang diatur dalam baris dan kolom. Matrik ditulis sebagai berikut:

$$\begin{bmatrix} a11 & a12 & \ldots & a1n \\ a21 & a22 & \ldots & a2n \\ \vdots & & & \vdots \\ am1 & am2 & \ldots & amn \end{bmatrix}$$

urutan di atas disebut sebuah matrik mXn, karena memiliki m baris dan n kolom.

Aturan simbol matrik:

a. menggunakan kurung siku [ ]
b. menggunakan kurung biasa ( )
c. menggunakan bentuk ‖ ‖
d. Nama matrik disimbolkan dengan hurup besar, A, B dsb
e. Elemen matrik di simbolkan dengan hurup kecil miring

karena matrik merupakan urutan – urutan bilangan berdimensi dua, maka diperlukan dua subskrip untuk menyatatakan setiap elemennya. Menurut perjanjian, subskrip pertama menyatakan baris, subskrip kedua menyatakan kolom. a_{mn} . *m* menyatakan baris, *n* menyatakan kolom. setiap matrik yang memiliki baris dan kolom sama (*m=n*) disebut matrik persegi (square matrice).

Contoh matrik

$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$, (1,2,3,3)

Lalu Muhamad Jaelani
Jurusan Teknik Geomatika
ITS Surabaya

Bukan matrik,

$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ & 1 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} & b \\ c & \end{bmatrix}$

2. Operasi Matrik;

   a. Kesamaan

   Dua matrik A dan B dikatakan sama (A=B), jika dan hanya jika elemen yang bersangkutan sama. $a_{ij}=b_{ij}$ untuk setiap i,j

   Contoh:

   A = $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, B= $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ A = B, karena $a_{11}=b_{11}$, $a_{12}=b_{12}$, $a_{21}=b_{21}$, $a_{22}=b_{22}$,

   A = $\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, B= $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ A ≠ B, karena $a_{11} \neq b_{11}$

   b. Perkalian dengan bilangan Skalar

   Bila diberikan sebuah matrik A dan sebuah bilangan skalar k, hasil kali k dan A didefinisikan sebagai kA;

   $$kA = \begin{bmatrix} k.a11 & ka12 & \ldots & ka1n \\ ka21 & ka22 & \ldots & ka2n \\ : & & & : \\ kam1 & kam2 & \ldots & kamn \end{bmatrix}$$

   setiap elemen dari A dikalikan langsung dengan k. Hasil kali kA merupakan sebuah matrik lain yang mempunyai m baris dan n baris, dimana m dan n ini sama dengan m dan n matrk asli (matrik A)

   c. Penjumlahan

   Matrik C merupakan hasil penjumlahan dari matrik A dan matrik B, dimana jumlah baris dan kolom matrik A harus sama dengan matrik B.

   Didefinisikan:

cij = aij+bij

$$C = \begin{bmatrix} c11 & c12 & \dots & c1n \\ c21 & c22 & \dots & c2n \\ : & & & : \\ cm1 & cm2 & \dots & cmn \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} a11 & a12 & \dots & a1n \\ a21 & a22 & \dots & a2n \\ : & & & : \\ am1 & am2 & \dots & amn \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b11 & b12 & \dots & b1n \\ b21 & b22 & \dots & b2n \\ : & & & : \\ bm1 & bm2 & \dots & bmn \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} a11+b11 & a12+b12 & \dots & a1n+b1n \\ a21+b21 & a22+b22 & \dots & a2n+b2n \\ : & & & : \\ am1+bm1 & am2+bm2 & \dots & amn+bmn \end{bmatrix}$$

pernyataan ini dapat diringkas menjadi

C = A + B

Hukum Asosiatip

A + B = B + A

A + (B + C) = (A+B) + C

d. Pengurangan

Aturan yang berlaku pada operasi Pengurangan sama dengan yang berlaku pada operasi penjumlahan.

A – B = A + (-) B

e. Perkalian antar matrik

Lalu Muhamad Jaelani
Jurusan Teknik Geomatika
ITS Surabaya

Jika diberikan sebuah m X n matrik A dan sebuah n X r matrik B, hasil kali AB didefinisikan sebagai m X r matrik C, dimana elemen elemennya dihitung dari elemen elemen dari A, B menurut.

cij = $\sum_{k=1}^{n} aikbkj,$ i = 1,...,m j= 1,..., r

Dalam hasil kali matrik AB, matrik A disebut pengali muka dan B pengali belakang. Hasil kali AB ditentukan hanya kalau jumlah kolom di A sama dengan jumlah baris di B

Aturan:

A dan B bisa dikalikan jika dan hanya jika jumlah kolom di A sama dengan jumlah baris di B

Contoh:

A $= \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 6 & 1 \end{bmatrix}$, B = $\begin{bmatrix} 4 \\ 5 \end{bmatrix}$

C = AB

$= \begin{bmatrix} [3(4)+2(5)] \\ [6(4)+1(5)] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 22 \\ 29 \end{bmatrix}$

- Berlaku hukum Asosiatif

  = (AB) C = A (BC) = A B C

- Berlaku hukum Distributif

  = A (B + C) = AB + BC

Latihan :

Lalu Muhamad Jaelani
Jurusan Teknik Geomatika
ITS Surabaya

Tunjukkan dengan penghitungan sebenarnya bahwa berlaku hukum asosiatif pada perkalian matrik berikut:

A=$\begin{bmatrix} a & 1 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$, B=$\begin{bmatrix} 0 & b & 7 \\ & & \\ 1 & 8 & 9 \end{bmatrix}$, C = $\begin{bmatrix} 3 & 7 & 1 \\ 2 & c & 1 \\ 1 & 4 & 0 \end{bmatrix}$

Di mana:

a, b, c = dua digit terakhir NRP Anda

Lalu Muhamad Jaelani
Jurusan Teknik Geomatika
ITS Surabaya

IDENTITAS, SKALAR, DIAGONAL DAN MATRIK NOL

Matrik Identitas:

Definisi: Matrik bujur sangkar yang mempunyai angka angka satu sepanjang diagonal utama (diagonal dari kiri atas sampai kanan bawah) dan elemen elemen lainnya bernilai nol.

Matrik Identitas disimbolkan dengan **I** atau $\mathbf{I_n}$, dimana n merupakan orde matrik

$$\mathbf{I} \quad = \quad \mathbf{I_4} \quad = \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & .0.. & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & .0.. & 1 \end{bmatrix}$$

Jika A adalah sebuah matrik persegi dari orde n dan I adalah matrik identitas dari orde n, maka:

$$IA = AI = A$$
$$I^2 = I, I^3 = I$$

Matrik Skalar:

Untuk setiap skalar K, matrik bujur sangkar

$S = \| k\, \delta_{ij} \| = k. I$

disebut matrik skalar

Matrik Diagonal:

Sebuah matrik bujur sangkar

$D = \| k_i\, \delta_{ij} \|$

Disebut sebuah amtrik diagonal.

Perhatikan bahwa k_i dapat berubah dengan $_i$

Contoh:

Lalu Muhamad Jaelani
Jurusan Teknik Geomatika
ITS Surabaya

$(1)\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} = (2)\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ adalah matrik skalar

$(2)\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$ adalah matrik diagonal

Matrik Nol:

Sebuah matrik yang elemen elemennya nol disebut matrik nol dan dinyatakan dengan symbol **0**.

Sebuah matrik NOL tidak perlu bujur sangkar

Contoh:

$\mathbf{0}=\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, $\mathbf{0}=\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ & & \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$, $\mathbf{0}=\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

Lalu Muhamad Jaelani
Jurusan Teknik Geomatika
ITS Surabaya

TRANSPOSE, MATRIK SIMETRIS, MATRIK SIMETRIS MIRING

Transpose:

Definisi; transpose dari sebuah matrik A = $\| a_{ij} \|$ adalah sebuah matrik dibentuk dari A dengan menukar baris baris dan kolom kolom sehingga bari i dari A menjadi kolom i dari matrik transpose. Transpose disimbolkan dengan A'.

A = $\| a_{ij} \|$

A'= $\| a_{ji} \|$

Contoh:

$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 5 \end{bmatrix}$, $A' = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 5 \end{bmatrix}$

$B = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 4 \\ & & \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$, $B' = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 1 \\ 4 & 0 \end{bmatrix}$

Jika A adalah matrik m X n, maka A' adalah matrik n X m

Perlu Anda perhatikan:

1. jika C = A + B maka C' = A' + B'
2. (AB)' = B' A'
3. I' = I
4. (A')' = A

Matrik Simetris:

Matrik simetris terjadi jika matrik A sama dengan matrik A', A= A'

Catatan: elemen diagonal adalah sembarang

Contoh:

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 & 7 \\ 0 & 3 & 5 \\ 7 & 5 & 1 \end{bmatrix}$$

Lalu Muhamad Jaelani
Jurusan Teknik Geomatika
ITS Surabaya

Matrik Simetris miring:

Matrik simetris terjadi jika matrik A sama dengan matrik -A’, A=-A’

Catatan: elemen diagonal adalah nol

Contoh:

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & -3 \\ -2 & 3 & 0 \end{bmatrix}$$

Lalu Muhamad Jaelani
Jurusan Teknik Geomatika
ITS Surabaya

Latihan:

Buktikan bahwa:

1. $IA = AI = A$
2. $I^2 = I$, $I^3 = I$
3. jika $C = A + B$ maka $C' = A' + B'$
4. $(AB)' = B' A'$
5. $I' = I$
6. $(A')' = A$

Lalu Muhamad Jaelani
Jurusan Teknik Geomatika
ITS Surabaya

Pemisahan Matriks, Determinan

Pemisahan Matriks

Matriks 'kecil' yang dibentuk dari pemisahan sebuah matriks disebut Matriks Bagian (sub-matriks)
Sub-matriks : jika kita mempunyai matrik A_{mn} kemudian kita coret semua baris-baris kecuali baris k dan semua kolom kolom keculi kolom s, maka akan diperoleh matrik k x s. Matrik A_{ks} ini disebut matrik bagian A_{mn}

Contoh:

$A_{42} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & .0.. & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & .0.. & 1 \end{bmatrix}$, jika kita coret baris ke 1 dan ke 4, serta kolom ke1 dan

kolom ke3, maka akan diperoleh:

$$A_{22} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Ada beberapa alasan untuk melakukan pemisahan matrik, diantaranya:

1. Pembagian dapat menyederhanakan penulisan atau pencetakan dari A
2. Ia menunjukkan beberapa susunan khusus dari A yang perlu diperhatikan
3. Pemisahan ini akan Memudahkan penghitungan

Sekarang kita akan mempertimbangkan pembagian dari sebuah pandangan yang lebih umum.

$A = \left[\begin{array}{ccc:c} a11 & a12 & a13 & a14 \\ a21 & a22 & a23 & a24 \\ \hdashline a31 & a32 & a33 & a34 \\ a41 & a42 & a43 & a44 \\ a51 & a52 & a53 & a54 \end{array}\right]$, bayangkan A dibagi menjadi empat oleh garis

garis putus seperti yang terlihat, sekarang kita memiliki 4 matrik baru:

Lalu Muhamad Jaelani
Jurusan Teknik Geomatika
ITS Surabaya

A-11 = $\begin{bmatrix} a11 & a12 & a13 \\ a21 & a22 & a23 \end{bmatrix}$, A-12 = $\begin{bmatrix} a14 \\ a24 \end{bmatrix}$

A-21 = $\begin{bmatrix} a31 & a32 & a33 \\ a41 & a42 & a43 \\ a51 & a52 & a53 \end{bmatrix}$ A22 = $\begin{bmatrix} a34 \\ a44 \\ a54 \end{bmatrix}$,

sehingga A dapat ditulis sebagai:

A = $\begin{bmatrix} A-11 & A-12 \\ A-21 & A-22 \end{bmatrix}$

Operasi matrik A dan B dapat dilakukan dengan operasi matrik matrik bagian dari A dan B, hal ini akan memudahkan penghitungan

Jika kita memiliki matrik A dan membaginya sebagai berikut:

A = $\left[\begin{array}{cc:c} 1 & 3 & 2 \\ 2 & 5 & 0 \\ \hdashline 4 & 1 & 7 \end{array}\right]$ = $\begin{bmatrix} A-11 & A-12 \\ A-21 & A-22 \end{bmatrix}$

A-11=$\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 5 \end{bmatrix}$, A-12 = $\begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix}$, A-21 = $\begin{bmatrix} 4 & 1 \end{bmatrix}$, A-22 = $\begin{bmatrix} 7 \end{bmatrix}$

Kita jika memiliki matrik B dan membaginya sebagai berikut

B = $\left[\begin{array}{c:cc} 0 & 1 & 2 \\ 2 & 4 & 5 \\ \hdashline 6 & 0 & 1 \end{array}\right]$ = $\begin{bmatrix} B-11 & B-12 \\ B-21 & B-22 \end{bmatrix}$;

B-11=$\begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix}$, B-12 = $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 5 \end{bmatrix}$, B-21 = $\begin{bmatrix} 6 \end{bmatrix}$, B-22=$\begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix}$

Lalu Muhamad Jaelani
Jurusan Teknik Geomatika
ITS Surabaya

Cara Penghitungan Biasa:
C= AB dengan mengalikan matriks matriks langsung tanpa pembagian:

C $= \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 2 & 5 & 0 \\ 4 & 1 & 7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 2 & 4 & 5 \\ 6 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 18 & 13 & 19 \\ 10 & 22 & 29 \\ 44 & 8 & 20 \end{bmatrix}$

Cara penghitungan dengan pembagian:

C $= \begin{bmatrix} A-11 & A-12 \\ A-21 & A-22 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} B-11 & B-12 \\ B-21 & B-22 \end{bmatrix}$

$= \begin{bmatrix} (A-11.B-11)+(A-12.B-21) & (A-11.B-12)+(A-12.B-22) \\ (A-21.B-11)+(A-22.B-21) & (A-21.B-12)+(A-22.B-22) \end{bmatrix}$

Dimana,

A-11.B-11+A-12.B-21= $\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix} [6] = \begin{bmatrix} 6 \\ 10 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 12 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 18 \\ 10 \end{bmatrix}$

A-11.B-12+A-12.B-22= $\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 5 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix} [0 \quad 1] = \begin{bmatrix} 13 & 17 \\ 22 & 29 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 13 & 19 \\ 22 & 29 \end{bmatrix}$

A-21.B-11+A-22.B-21= $[4 \quad 1] \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix} + [7][6] = [44]$

A-21.B-12+A-22.B.22= $[4 \quad 1] \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 5 \end{bmatrix} + [7][0 \quad 1] = [8 \quad 13] + [0 \quad 7] = [8 \quad 20]$

Sehingga diperoleh hasil sebagai berikut

C= $\left[\begin{array}{c|cc} 18 & 13 & 19 \\ 10 & 22 & 29 \\ \hline 44 & 8 & 20 \end{array}\right]$

<u>Determinan</u>

Lalu Muhamad Jaelani
Jurusan Teknik Geomatika
ITS Surabaya

Notasi | |

Sebuah determinan orde dua didefinisikan sebagai $\begin{vmatrix} a11 & a12 \\ a21 & a22 \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$

Determinan orde tiga didefinisikan sebagai

$$\begin{vmatrix} a11 & a12 & a13 \\ a21 & a22 & a23 \\ a31 & a32 & a33 \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32}$$

$$\begin{vmatrix} a11 & a12 & a13 \\ a21 & a22 & a23 \\ a31 & a32 & a33 \end{vmatrix}\begin{vmatrix} a11 & a12 & a13 \\ a21 & a22 & a23 \\ a31 & a32 & a33 \end{vmatrix}$$

-

\+

Beberapa sifat Determinan:

1. Penukaran dua kolom dalam suatu matrik An mengubah tanda dari |A |

   |A | = $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix}$ = -2, jika dua kolom ditukar maka determinan yang baru adalah

   |A | = $\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 3 \end{vmatrix}$ =2
2. Penukaran dua baris dalam suatu matrik An mengubah tanda dari |A |
3. Jika suatu matriks mempunyai du baris dan dua kolom yang sama maka Determinannya = 0
4. |A | = |A' |

   |A | = $\begin{vmatrix} 4 & 1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix}$ =5
5. |A | = x, maka |k A | = k^2x

Latihan :

1. tentukan cara pembagian matriks A dan B jika akan dilakukan perkalian matriks A dan B
2. Buktikan sifat determinan berikut, untuk matrik orde >2
   - Penukaran dua kolom dalam suatu matrik An mengubah tanda dari |A |
   - Penukaran dua baris dalam suatu matrik An mengubah tanda dari |A |
   - $|A| = x$, maka $|k\,A| = k^2x$

Lalu Muhamad Jaelani
Jurusan Teknik Geomatika
ITS Surabaya

Kofaktor, Pengembangan Kofaktor untuk menghitung determinan suatu Matriks,Adjoint dan Invers Matrik

Kofaktor

Kofaktor Aij dari elemen aij dari sebuah matriks bujur sangkar A adalah $(-1)^{i+j}$ kali determinan dari matriks matrik bagian (sub matric) yang diperoleh dari A dengan mencoret baris i dan kolom j

$$A = \begin{vmatrix} a11 & a12 & a13 \\ a21 & a22 & a23 \\ a31 & a32 & a33 \end{vmatrix}$$

Kofaktor *Aij* diperoleh dengan mencoret baris I dan kolom j dan mengalikan$(-1)^{i+j}$ dengan determinan yang dihasilkan, sehingga:

$$A_{11}= (-1)^{1+1}\begin{vmatrix} a22 & a23 \\ a32 & a33 \end{vmatrix} = (+)\ a22\ a33 - a23\ a32$$

$$A_{12}= (-1)^{1+2}\begin{vmatrix} a21 & a23 \\ a31 & a33 \end{vmatrix} = (-)\ a21\ a33 - a23\ a31$$

$$A_{13}= (-1)^{1+3}\begin{vmatrix} a21 & a22 \\ a31 & a32 \end{vmatrix} = (+)\ a21\ a32 - a22\ a31$$

$$A_{21}= (-1)^{2+1}\begin{vmatrix} a12 & a13 \\ a32 & a33 \end{vmatrix} = (-)\ a12\ a33 - a13\ a32$$

$$A_{22}= (-1)^{2+2}\begin{vmatrix} a11 & a13 \\ a31 & a33 \end{vmatrix} = (+)\ a11\ a33 - a13\ a31$$

$$A_{23}= (-1)^{2+3}\begin{vmatrix} a11 & a12 \\ a31 & a32 \end{vmatrix} = (-)\ a11\ a32 - a12\ a31$$

$$A_{31}= (-1)^{3+1}\begin{vmatrix} a12 & a13 \\ a22 & a23 \end{vmatrix} = (+)\ a12\ a23 - a13\ a22$$

Lalu Muhamad Jaelani
Jurusan Teknik Geomatika
ITS Surabaya

$A_{32}= (-1)^{3+2}\begin{vmatrix} a11 & a13 \\ a21 & a23 \end{vmatrix} = (-)$ a11 a23 – a13 a21

$A_{33}= (-1)^{3+3}\begin{vmatrix} a11 & a12 \\ a21 & a22 \end{vmatrix} = (+)$ a11 a22 – a12 a21

Pengembangan Kofaktor untuk menghitung determinan suatu Matriks:

$|A| = a_{11}A_{11}+a_{12}A_{12}+a_{13}A_{13}$
$= a_{21}A_{21}+a_{22}A_{22}+a_{23}A_{23}$
$= a_{31}A_{31}+a_{32}A_{32}+a_{33}A_{33}$

Adjoint:
Adjoin merupakan dari matrik matrik kofaktor.
Jika kofaktor A = [X] maka adjoint A = [X]'

Invers Matrik:
Simbol invers matrik A = A^{-1}, ini tidak sama dengan 1/A karena Operasi matrik tidak mengenal istilah pembagian matriks.
Jika AB = BA = I, jika matrik semacam B ada, maka B adalah matriks Invers dari A. sehingga A A^{-1} = A^{-1} A = I
Rumus mencari invers:

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} adj.A$$

Matriks Singular dan Matriks tidak Singular.
Matriks bujur sangkar A dikatakan Singular jika $|A| = 0$, tidak singular jika $|A| \neq 0$. Matriks yang bisa diinvers hanya Matriks tidak Singular.

Contoh:

$$A = \begin{bmatrix} a11 & a12 \\ a21 & a22 \end{bmatrix}$$

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} adj.A$$

|A| = a11a22 – a12 a21
Adj A =?

Lalu Muhamad Jaelani
Jurusan Teknik Geomatika
ITS Surabaya

Kofaktor A = $\begin{bmatrix} a22 & -a21 \\ -a12 & a11 \end{bmatrix}$, sehingga Adj A= $\begin{bmatrix} a22 & -a12 \\ -a21 & a11 \end{bmatrix}$

$$A^{-1} = \frac{1}{a11a22 - a12a21}\begin{bmatrix} a22 & -a12 \\ -a21 & a11 \end{bmatrix}$$

Sifat sifat invers:

$(AB)^{-1} = B^{-1} A^{-1}$

$(A^{-1})^{-1} = A$

$(A')^{-1} = (A^{-1})'$

$(A^{-1})'A' = I = A' (A^{-1})'$

Lalu Muhamad Jaelani
Jurusan Teknik Geomatika
ITS Surabaya

Aplikasi Operasi Matrik

Metode Matriks dalam Perataan kwadrat Terkecil

AX =L+V

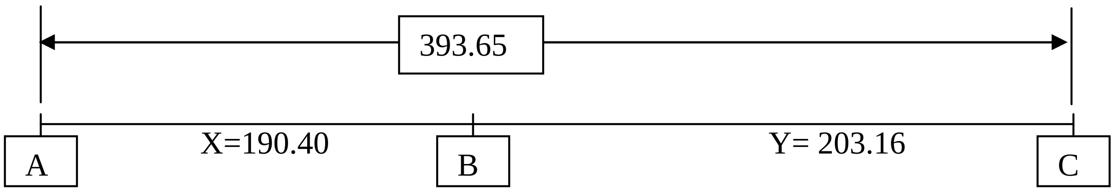
$$A = \begin{bmatrix} a11 & a12 & \dots & a1n \\ a21 & a22 & \dots & a2n \\ \vdots & & & \vdots \\ am1 & am2 & \dots & amn \end{bmatrix} \qquad X = \begin{bmatrix} x1 \\ x2 \\ \vdots \\ x3 \end{bmatrix}$$

$$L = \begin{bmatrix} l1 \\ l2 \\ \vdots \\ l3 \end{bmatrix} \qquad V = \begin{bmatrix} v1 \\ v2 \\ \vdots \\ v3 \end{bmatrix}$$

$A^T A\ X = A^T L$

$X = (ATA)^{-1}\ A^T L$

Contoh:



Solusi:

Persamaan pengamatan

X+ Y =393.65
X =190.40
Y =203.16

Persamaan pengamatan dengan, memasukkan Residual error (v)
X+ Y =393.65+v1
X+ 0 =190.40+v2
0+ Y =203.16+v3

jika di rubah ke bentuk matrik :

A $=\begin{bmatrix}1 & 1\\ 1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}$, X$=\begin{bmatrix}x\\ y\end{bmatrix}$, L$=\begin{bmatrix}393.65\\ 190.40\\ 203.16\end{bmatrix}$, V$=\begin{bmatrix}v1\\ v2\\ v3\end{bmatrix}$

$A^TA=\begin{bmatrix}1 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 1\\ 1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2 & 1\\ 1 & 2\end{bmatrix}$

$(A^TA)^{-1}=1/3\begin{bmatrix}2 & -1\\ -1 & 2\end{bmatrix}$, $A^TL=\begin{bmatrix}584.05\\ 596.81\end{bmatrix}$

$X = (ATA)^{-1} A^TL$

$=1/3\begin{bmatrix}2 & -1\\ -1 & 2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}584.05\\ 596.81\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}190.43\\ 203.19\end{bmatrix}$

Untuk melihat ketelitian, kita bisa menghitung:
Matrik Sisa (V) =AX-L

$=\begin{bmatrix}1 & 1\\ 1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}190.43\\ 203.19\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-0.03\\ 0.03\\ 0.03\end{bmatrix}$

Standar Deviasi = $\sigma_0=\sqrt{VTV/r}$

$V^TV=\begin{bmatrix}-0.03 & 0..03 & 0.03\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-0.03\\ 0.03\\ 0.03\end{bmatrix}=[0.0027]$

$=\sigma_0=\sqrt{0.0027/(3-2)}=\pm 0.052$

$=\sigma_x=\pm 0.052\sqrt{2/3}=\pm 0.042$

$=\sigma_x=\pm 0.052\sqrt{2/3}=\pm 0.042$

Lalu Muhamad Jaelani
Jurusan Teknik Geomatika
ITS Surabaya